$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{0}{2} = 0$$

On a : $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$ donc f est prolongeable par continuité en 0

$$2°/ \begin{cases} f_1(x) = f(x) \text{ pour } x \neq 0 \\ f_1(0) = \lim f_0 = 0 \end{cases}$$

3°/ $\lim_{x \to +\infty} f(x)$?

$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow \quad 0 \leq 1 - \cos x \leq 2$

$\Rightarrow$ Pour tout $x > 0$: $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$

On a : $\begin{cases} 0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x} \quad \text{pour tout } x > 0 \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to -\infty} f = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}{x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} - \frac{1}{x} \right) = -1$$

D_1 : $y = 0$ est une asymptote à Cf au voisinage de $+\infty$

D_2 : $y = -1$ est une asymptote à Cf au voisinage de $-\infty$

Solution 15 :

$$1°/ \lim_{x \to -\infty} f = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \quad (x < 0 \text{ alors } |x| = -x)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1$$